

№2-дәріс.

Тақырыбы: Айнымалыны ауыстыру әдісі және бөліктеп интегралдау.

Интегралдаудың негізгі әдістері

Қарапайым әдістерді қолданып интегралдау.

Қарапайым әдістер деп ретінде интеграл астындағы өрнектерге (функцияларға) тепе-тең түрлендірулер жасау арқылы немесе анықталған интегралдың қасиеттерін қолдану арқылы кестелік интегралға келтіру әдістерін айтамыз.

$$\text{Мысал 1. } \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C ;$$

$$\text{Мысал 2. } \int \frac{du}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C ;$$

$$\text{Мысал 3. } \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\sin u \, du}{\cos u} = - \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = - \ln|\cos u| + C ;$$

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау.

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни, кестелік немесе кестелік интегралға куелтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x) \, dx$ интегралын есептеу қажет болсын. $x = \varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда $dx = \varphi'(t) \, dt$ және анықталмаған интегралды интегралдаудың инварианттылық формуласының қасиеттері негізінде айнымалыны ауыстыру формуласын аламыз:

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Бұл формула анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы деп аталады. Интегралдың оң жағын есептеп шығарғаннан кейін интегралдың жаңа айнымалысы t -дан қайта x айнымалысына көшеміз.

$$\text{Мысал 4. } \int e^{\frac{x}{4}} \, dx \text{ тап.}$$

$$\text{Шешуі: } x = 4t \text{ деп белгілесек, онда } dx = 4 \, dt \text{ . Сонымен, } \int e^{\frac{x}{4}} \, dx = 4 \int e^t \, dt = 4 e^t + C$$

$$\text{Мысал 5. } \int x \sqrt{x-3} \, dx \text{ тап.}$$

$$\text{Шешуі: } \sqrt{x-3} = t \text{ болсын, онда } x = t^2 + 3, \, dx = 2t \, dt \text{ . Сондықтан}$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x-3} \, dx &= \int (t^2 + 3) t \, 2t \, dt = 2 \int (t^4 + 3t^2) \, dt = 2 \int t^4 \, dt + 6 \int t^2 \, dt = \frac{2}{5} t^5 + 2t^3 + C = \\ &= \frac{2}{5} (x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C . \end{aligned}$$

Бөліктеп интегралдау әдісі.

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv) = u \, dv + v \, du$. Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

Бұл **бөліктеп интегралдау формуласы** деп аталады. Бұл формула берілген $\int u dv$ интегралынан гөрі қарапайым болатын $\int v du$ интегралына келтіреді.

Бөліктеп интегралдауды мынадай түрдегі интегралдарға қолданған қолайлы:

1. $\int P(x) \ell^{kx} dx$, $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx$, түріндегі интегралдар, мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, k - тұрақты сан. $u = P(x)$ деп, ал dv ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

2. $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \operatorname{arccotg} x dx$ түріндегі интегралдар. $P(x) dx = dv$ деп, ал u ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

3. $\int \ell^{ax} \sin bx dx$, $\int \ell^{ax} \cos bx dx$ түріндегі интегралдар, мұндағы a және b - тұрақты сандар. $u = \ell^{ax}$ деп, ал dv ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

Мысал 6. $\int (2x + 1) \ell^{3x} dx$ тап.

Шешуі: $\left[\begin{array}{l} u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \ell^{3x} dx \Rightarrow v = \int \ell^{3x} dx \end{array} \right]$ болсын.

$$\int (2x + 1) \ell^{3x} dx = (2x + 1) \frac{1}{3} \ell^{3x} - \int \frac{1}{3} \ell^{3x} \cdot 2 dx = \frac{1}{3} (2x + 1) \ell^{3x} - \frac{2}{9} \ell^{3x} + C$$

Мысал 7. $\int \ln x dx$ тап. $\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right]$ болсын.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

№1. Берілген интегралдарды есепте және нәтижелерін дифференциалдау арқылы тексер:

$$1. \int (5x^7 - 3\sqrt{x^3} + \frac{3}{4x}) dx;$$

$$2. \int (3 \sin x + 2^x 3^{2x} - \frac{1}{9+x^2}) dx;$$

$$3. \int \sqrt[7]{(5x+3)^3} dx;$$

$$4. \int (\sin 7x - e^{3-2x} + \frac{1}{\cos^2 4x}) dx;$$

$$5. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$$

$$6. \int (e^{2x} + e^{-2x}) dx; \quad 7. \int \operatorname{ctg}^3 x dx; \quad 8. \int \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} dx; \quad 9. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 7}$$

№2. Анықталмаған интегралдарды айнымалыларды ауыстыру әдісін қолданып есепте:

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}; \quad 2. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \quad 4. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}; \quad 5. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

Жауаптары:

$$1. 2(\sqrt{x+3} - \ln |1 + \sqrt{x+3}|) + C \quad 2. 2\sqrt{1 + \ln x} - \ln \ln x + 2 \ln |\sqrt{1 + \ln x} - 1| + C;$$

$$3. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4(1 + \sqrt[4]{x}) + C; \quad 4. C - \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{9x}; \quad 5. 2/3(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C.$$

№3. Анықталмаған интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен шығар:

$$1. \int x \cos 3x dx; \quad 2. \int \ln^2 x dx; \quad 3. \int \arccos x dx; \quad 4. \int x^3 e^{-x^2} dx; \quad 5. \int \sin(\ln x) dx$$

(Жауаптары:

$$1. 1/3x \sin 3x + 1/9 \cos 3x + C; \quad 2. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C;$$

$$3. x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C; \quad 4. -1/2 e^{-x^2} (x^2 + 1) + C; \quad 5. x/2(\sin \ln x - \cos \ln x) + C).$$

№4. Анықталмаған интегралдарды есепте:

$$1. \int \cos 2x \sin 10x dx; \quad 2. \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx; \quad 3. \int \frac{x+3}{x+1} dx.$$

№5. Берілген интегралдарды есепте және нәтижелерін дифференциалдау арқылы тексер:

$$1. \int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2 \sin x - 3) dx; \quad 2. \int (\sin 3x + x\sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$3. \int (x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x) dx; \quad 4. \int (x^{-2} + 7x^6 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx.$$

№6. Анықталмаған интегралдарды айнымалыларды ауыстыру әдісін қолданып есепте:

$$1. \int x^3 \sqrt{4 - 3x^4} dx; \quad 2. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}; \quad 4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-2x^3}}; \quad 5. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

(Жауаптары

$$1. -1/8 \sqrt{(4-3x^4)^3} + C; \quad 2. 2/3 \sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C;$$

$$3. -1/2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C; \quad 4. -1/4 \sqrt[3]{(9-2x^3)^2} + C; \quad 5. C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x).$$

№7. Анықталмаған интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен шығар:

$$6. \int \arcsin x dx; \quad 7. \int \frac{\ln x}{x} dx; \quad 8. \int x e^{-7x} dx; \quad 9. \int \ln(1+x^2) dx; \quad 10. \int x 2^{3x} dx.$$

Сұрақтар:

1. Алғашқы функция және анықталмаған интегралдар ұғымдары.
2. Анықталмаған интегралдар қасиеттері.
3. Анықталмаған интегралдар кестесі.
4. Интегралдаудың негізгі әдістері. Қарапайым әдістерді қолданып интегралдау. Мүшелеп интегралдау және дифференциал астына енгізу арқылы интегралдау әдістері.
5. Айнымалыны ауыстыру әдісі.
6. Бөліктеп интегралдау.